

# TCL sous dépendance partielle, et application aux permutations aléatoires

Victor Dubach

Groupe de Travail "Probabilités et Statistiques" de l'IECL,  
08/02/24

# I. TCL et graphes de dépendance

## Théorème Central Limite "standard"

Soit  $(X_{n,i})_{n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq N_n}$  une famille de v.a.r.'s (où  $N_n \rightarrow \infty$ ) que l'on suppose **indépendantes**, **identiquement distribuées**, et de **variance finie**. Alors, en posant  $S_n := \sum_{i=1}^{N_n} X_{n,i}$ , on a la convergence en loi suivante :

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\text{Var}S_n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathcal{N}(0, 1).$$

# I. TCL et graphes de dépendance

## Théorème Central Limite “standard”

Soit  $(X_{n,i})_{n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq N_n}$  une famille de v.a.r.'s (où  $N_n \rightarrow \infty$ ) que l'on suppose **indépendantes**, **identiquement distribuées**, et de **variance finie**. Alors, en posant  $S_n := \sum_{i=1}^{N_n} X_{n,i}$ , on a la convergence en loi suivante :

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\text{Var}S_n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathcal{N}(0, 1).$$

“identiquement distribuées”  $\rightarrow$  cette hypothèse peut être affaiblie, e.g. avec le *critère de Lindeberg*.

# I. TCL et graphes de dépendance

## Théorème Central Limite “standard”

Soit  $(X_{n,i})_{n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq N_n}$  une famille de v.a.r.'s (où  $N_n \rightarrow \infty$ ) que l'on suppose **indépendantes**, **identiquement distribuées**, et de **variance finie**. Alors, en posant  $S_n := \sum_{i=1}^{N_n} X_{n,i}$ , on a la convergence en loi suivante :

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\text{Var}S_n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathcal{N}(0, 1).$$

“identiquement distribuées”  $\rightarrow$  cette hypothèse peut être affaiblie, e.g. avec le *critère de Lindeberg*.

“variance finie”  $\rightarrow$  sinon, sous hypothèses techniques, on peut obtenir un autre théorème limite en changeant les coefficients de normalisation et en remplaçant la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  par une *loi stable*...

# I. TCL et graphes de dépendance

## Théorème Central Limite “standard”

Soit  $(X_{n,i})_{n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq N_n}$  une famille de v.a.r.'s (où  $N_n \rightarrow \infty$ ) que l'on suppose **indépendantes**, **identiquement distribuées**, et de **variance finie**. Alors, en posant  $S_n := \sum_{i=1}^{N_n} X_{n,i}$ , on a la convergence en loi suivante :

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\text{Var}S_n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathcal{N}(0, 1).$$

“identiquement distribuées”  $\rightarrow$  cette hypothèse peut être affaiblie, e.g. avec le *critère de Lindeberg*.

“variance finie”  $\rightarrow$  sinon, sous hypothèses techniques, on peut obtenir un autre théorème limite en changeant les coefficients de normalisation et en remplaçant la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  par une *loi stable*...

Q: Comment affaiblir l'hypothèse d'indépendance ?

# I. TCL et graphes de dépendance

## Définition

Soit  $L = (V, E)$  un graphe et  $(X_i)_{i \in V}$  une famille de variables aléatoires. On dit que  $L$  en est *un graphe de dépendance* si :  
pour toutes parties  $I, J \subseteq V$  disjointes et déconnectées, les deux familles  $(X_i)_{i \in I}$  et  $(X_j)_{j \in J}$  sont indépendantes.

# I. TCL et graphes de dépendance

## Définition

Soit  $L = (V, E)$  un graphe et  $(X_i)_{i \in V}$  une famille de variables aléatoires. On dit que  $L$  en est *un graphe de dépendance* si :  
pour toutes parties  $I, J \subseteq V$  disjointes et déconnectées, les deux familles  $(X_i)_{i \in I}$  et  $(X_j)_{j \in J}$  sont indépendantes.

Exemples :

- Le graphe complet est toujours un graphe de dépendance.
- Le graphe vide est un graphe de dépendance ssi les variables sont mutuellement indépendantes.

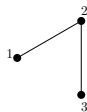
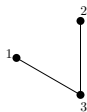
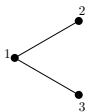
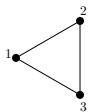
# I. TCL et graphes de dépendance

## Définition

Soit  $L = (V, E)$  un graphe et  $(X_i)_{i \in V}$  une famille de variables aléatoires. On dit que  $L$  en est *un graphe de dépendance* si : pour toutes parties  $I, J \subseteq V$  disjointes et déconnectées, les deux familles  $(X_i)_{i \in I}$  et  $(X_j)_{j \in J}$  sont indépendantes.

Exemples :

- Le graphe complet est toujours un graphe de dépendance.
- Le graphe vide est un graphe de dépendance ssi les variables sont mutuellement indépendantes.
- Soient  $X_1, X_2$  deux variables de lois  $\text{Ber}(1/2)$  indépendantes, et  $X_3 := 1_{X_1=X_2}$ . Les graphes de dépendance possibles sont :





# I. TCL et graphes de dépendance

## Définition

Soit  $L = (V, E)$  un graphe et  $(X_i)_{i \in V}$  une famille de variables aléatoires. On dit que  $L$  en est *un graphe de dépendance* si :  
pour toutes parties  $I, J \subseteq V$  disjointes et déconnectées, les deux familles  $(X_i)_{i \in I}$  et  $(X_j)_{j \in J}$  sont indépendantes.

Exemples :

- Une suite de variables  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  est dite  $m$ -dépendante si :  
 $\forall k$ , les deux familles  $(X_i)_{i \leq k}$  et  $(X_i)_{i > k+m}$  sont indépendantes.  
Cela revient à dire que le graphe suivant est de dépendance ( $m = 2$  sur la figure):



# I. TCL et graphes de dépendance

## Définition

Soit  $L = (V, E)$  un graphe et  $(X_i)_{i \in V}$  une famille de variables aléatoires. On dit que  $L$  en est *un graphe de dépendance* si :  
pour toutes parties  $I, J \subseteq V$  disjointes et déconnectées, les deux familles  $(X_i)_{i \in I}$  et  $(X_j)_{j \in J}$  sont indépendantes.

Exemples :

- Une suite de variables  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  est dite  $m$ -dépendante si :  
 $\forall k$ , les deux familles  $(X_i)_{i \leq k}$  et  $(X_i)_{i > k+m}$  sont indépendantes.  
Cela revient à dire que le graphe suivant est de dépendance ( $m = 2$  sur la figure):



- ⚠ Dans cet exposé, on considérera que tout sommet d'un graphe fait partie de ses propres voisins.

# I. TCL et graphes de dépendance

## Définition

Soit  $L = (V, E)$  un graphe et  $(X_i)_{i \in V}$  une famille de variables aléatoires. On dit que  $L$  en est *un graphe de dépendance* si :  
pour toutes parties  $I, J \subseteq V$  disjointes et déconnectées, les deux familles  $(X_i)_{i \in I}$  et  $(X_j)_{j \in J}$  sont indépendantes.

Remarque : il existe une notion plus subtile que ces graphes de dépendance "booléens"

→ graphes de dépendance *pondérés* (Féray 2016).

# I. TCL et graphes de dépendance

## TCL avec graphes de dépendance (P.L.'82, J.'88)

Pour tout  $n$ , soit  $(X_{n,i})_{1 \leq i \leq N_n}$  une famille de v.a.r.'s vérifiant p.s.  $|X_{n,i}| \leq B_n$ . Soit  $L_n$  un graphe de dépendance, et  $\Delta_n$  le degré maximal de ses sommets. On pose  $S_n := \sum_{i=1}^{N_n} X_{n,i}$  et on suppose :

$$\frac{(N_n/\Delta_n)^{1/3} \Delta_n B_n}{\sqrt{\text{Var} S_n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Alors on a la convergence en loi :

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\text{Var} S_n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, 1).$$

# I. TCL et graphes de dépendance

## TCL avec graphes de dépendance (P.L.'82, J.'88)

Pour tout  $n$ , soit  $(X_{n,i})_{1 \leq i \leq N_n}$  une famille de v.a.r.'s vérifiant p.s.  $|X_{n,i}| \leq B_n$ . Soit  $L_n$  un graphe de dépendance, et  $\Delta_n$  le degré maximal de ses sommets. On pose  $S_n := \sum_{i=1}^{N_n} X_{n,i}$  et on suppose :

$$\frac{(N_n/\Delta_n)^{1/3} \Delta_n B_n}{\sqrt{\text{Var} S_n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Alors on a la convergence en loi :

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\text{Var} S_n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, 1).$$

Idee de preuve : méthode des cumulants (une variante de la méthode des moments).

# I. TCL et graphes de dépendance

## TCL avec graphes de dépendance (P.L.'82, J.'88)

Pour tout  $n$ , soit  $(X_{n,i})_{1 \leq i \leq N_n}$  une famille de v.a.r.'s vérifiant p.s.  $|X_{n,i}| \leq B_n$ . Soit  $L_n$  un graphe de dépendance, et  $\Delta_n$  le degré maximal de ses sommets. On pose  $S_n := \sum_{i=1}^{N_n} X_{n,i}$  et on suppose :

$$\frac{(N_n/\Delta_n)^{1/3} \Delta_n B_n}{\sqrt{\text{Var} S_n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Alors on a la convergence en loi :

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\text{Var} S_n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, 1).$$

Difficulté notable : calcul de la variance...

## II. Calcul de la variance pour les $U$ -statistiques

### Définition

On appelle  $U$ -statistique (symétrique, libre...) une v.a.r. de la forme

$$U = \sum_{I \in \binom{V}{r}} \phi(Z_i, i \in I)$$

où  $(Z_i)_{i \in V}$  est une famille de v.a.'s identiquement distribuées,  $r$  est un entier, et  $\phi$  une fonction réelle symétrique bornée à  $r$  variables.

## II. Calcul de la variance pour les $U$ -statistiques

### Définition

On appelle  $U$ -statistique (symétrique, libre...) une v.a.r. de la forme

$$U = \sum_{I \in \binom{V}{r}} \phi(Z_i, i \in I)$$

où  $(Z_i)_{i \in V}$  est une famille de v.a.'s identiquement distribuées,  $r$  est un entier, et  $\phi$  une fonction réelle symétrique bornée à  $r$  variables.

### Propriété

Supposons que  $L = (V, E)$  soit un graphe de dépendance pour  $(Z_i)_{i \in V}$ . Alors un graphe de dépendance pour  $(\phi(Z_i, i \in I))_{I \in \binom{V}{r}}$  est le graphe noté  $\binom{L}{r}$ , de sommets  $\binom{V}{r}$  et tel que :

$$I \sim J \text{ dans } \binom{L}{r} \quad \text{ssi} \quad \exists i \in I, \exists j \in J, i \sim j \text{ dans } L.$$



## II. Calcul de la variance pour les $U$ -statistiques

### Définition

On appelle  $U$ -statistique (symétrique, libre...) une v.a.r. de la forme

$$U = \sum_{I \in \binom{V}{r}} \phi(Z_i, i \in I)$$

où  $(Z_i)_{i \in V}$  est une famille de v.a.'s identiquement distribuées,  $r$  est un entier, et  $\phi$  une fonction réelle symétrique bornée à  $r$  variables.

### Propriété

Supposons que  $L = (V, E)$  soit un graphe de dépendance pour  $(Z_i)_{i \in V}$ . Alors un graphe de dépendance pour  $(\phi(Z_i, i \in I))_{I \in \binom{V}{r}}$  est le graphe noté  $\binom{L}{r}$ , de sommets  $\binom{V}{r}$  et tel que :

$$I \sim J \text{ dans } \binom{L}{r} \quad \text{ssi} \quad \exists i \in I, \exists j \in J, i \sim j \text{ dans } L.$$

Degrés de  $L$  bornés par  $D \Rightarrow$  degrés de  $\binom{L}{r}$  bornés par  $rD \binom{n-1}{r-1}$ .

## II. Calcul de la variance pour les $U$ -statistiques

Cadre : suite de  $U$ -statistiques

$$U_n = \sum_{I \in \binom{V_n}{r}} \phi(Z_{n,i}, i \in I),$$

graphe de dépendance  $L_n = (V_n, E_n)$  de degrés bornés par  $D$ .

### Calcul de la variance (au tableau ?)

$$\text{Var} U_n =$$

où, si  $(\hat{Z}_k)_{1 \leq k < r}$  est i.i.d. de même loi marginale que  $(Z_i)_{i \in V}$  :

$$\varphi(z) = \mathbb{E} \left[ \phi \left( \hat{Z}_1, \dots, \hat{Z}_{r-1}, z \right) \right].$$

## II. Calcul de la variance pour les $U$ -statistiques

Cadre : suite de  $U$ -statistiques

$$U_n = \sum_{I \in \binom{V_n}{r}} \phi(Z_{n,i}, i \in I),$$

graphe de dépendance  $L_n = (V_n, E_n)$  de degrés bornés par  $D$ .

Calcul de la variance (au tableau ?)

$$\text{Var}U_n = \frac{n^{2r-2}}{(r-1)!^2} \sum_{i \sim j} \text{Cov}[\varphi(Z_{n,i}), \varphi(Z_{n,j})] + o(n^{2r-1})$$

où, si  $(\hat{Z}_k)_{1 \leq k < r}$  est i.i.d. de même loi marginale que  $(Z_i)_{i \in V}$  :

$$\varphi(z) = \mathbb{E} \left[ \phi \left( \hat{Z}_1, \dots, \hat{Z}_{r-1}, z \right) \right].$$

## II. Calcul de la variance pour les $U$ -statistiques

### Calcul de la variance

$$\text{Var} U_n = \frac{n^{2r-2}}{(r-1)!^2} \sum_{i \sim j} \text{Cov} [\varphi(Z_{n,i}), \varphi(Z_{n,j})] + o(n^{2r-1}).$$

## II. Calcul de la variance pour les $U$ -statistiques

### Calcul de la variance

$$\text{Var} U_n = \frac{n^{2r-2}}{(r-1)!^2} \sum_{i \sim j} \text{Cov} [\varphi(Z_{n,i}), \varphi(Z_{n,j})] + o(n^{2r-1}).$$

### Corollaire

Si

$$\sum_{i \sim j} \text{Cov} [\varphi(Z_{n,i}), \varphi(Z_{n,j})] = \Theta(n)$$

alors

$$\frac{U_n - \mathbb{E}U_n}{\sqrt{\text{Var} U_n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathcal{N}(0, 1).$$

### III. Application : motifs dans les permutations

#### Définition

Soit  $\tau = \tau(1) \tau(2) \dots \tau(n) \in \mathfrak{S}_n$ . Le *motif* induit par  $\tau$  sur  $I = (i_1 < \dots < i_r)$  est la permutation  $\text{pat}(I, \tau) = \pi \in \mathfrak{S}_r$  définie par :

$$\forall j, k \in \llbracket 1, r \rrbracket, \quad \pi(j) < \pi(k) \iff \tau(i_j) < \tau(i_k).$$

### III. Application : motifs dans les permutations

#### Définition

Soit  $\tau = \tau(1) \tau(2) \dots \tau(n) \in \mathfrak{S}_n$ . Le *motif* induit par  $\tau$  sur  $I = (i_1 < \dots < i_r)$  est la permutation  $\text{pat}(I, \tau) = \pi \in \mathfrak{S}_r$  définie par :

$$\forall j, k \in \llbracket 1, r \rrbracket, \quad \pi(j) < \pi(k) \iff \tau(i_j) < \tau(i_k).$$

$$\tau = 4276315$$

### III. Application : motifs dans les permutations

#### Définition

Soit  $\tau = \tau(1) \tau(2) \dots \tau(n) \in \mathfrak{S}_n$ . Le *motif* induit par  $\tau$  sur  $I = (i_1 < \dots < i_r)$  est la permutation  $\text{pat}(I, \tau) = \pi \in \mathfrak{S}_r$  définie par :

$$\forall j, k \in \llbracket 1, r \rrbracket, \quad \pi(j) < \pi(k) \iff \tau(i_j) < \tau(i_k).$$

$$\tau = \underline{4}27\underline{6}3\underline{1}5$$



### III. Application : motifs dans les permutations

#### Définition

Soit  $\tau = \tau(1) \tau(2) \dots \tau(n) \in \mathfrak{S}_n$ . Le *motif* induit par  $\tau$  sur  $I = (i_1 < \dots < i_r)$  est la permutation  $\text{pat}(I, \tau) = \pi \in \mathfrak{S}_r$  définie par :

$$\forall j, k \in \llbracket 1, r \rrbracket, \quad \pi(j) < \pi(k) \iff \tau(i_j) < \tau(i_k).$$

$$\tau = \underline{4}27\underline{6}3\underline{1}5 \quad \Rightarrow \quad \text{pat}(I, \tau) = 231$$

### III. Application : motifs dans les permutations

#### Définition

Soit  $\tau = \tau(1) \tau(2) \dots \tau(n) \in \mathfrak{S}_n$ . Le *motif* induit par  $\tau$  sur  $I = (i_1 < \dots < i_r)$  est la permutation  $\text{pat}(I, \tau) = \pi \in \mathfrak{S}_r$  définie par :

$$\forall j, k \in \llbracket 1, r \rrbracket, \quad \pi(j) < \pi(k) \iff \tau(i_j) < \tau(i_k).$$

$$\tau = \underline{4}27\underline{6}3\underline{1}5 \quad \Rightarrow \quad \text{pat}(I, \tau) = 231$$

#### Définition

Le nombre d'occurrences d'un motif  $\pi \in \mathfrak{S}_r$  dans  $\tau \in \mathfrak{S}_n$  est :

$$\text{Occ}(\pi, \tau) := \sum_{I \in \binom{\llbracket 1, n \rrbracket}{r}} 1_{\text{pat}(I, \tau) = \pi}$$

### III. Application : motifs dans les permutations

#### Définition

Soit  $\tau = \tau(1) \tau(2) \dots \tau(n) \in \mathfrak{S}_n$ . Le *motif* induit par  $\tau$  sur  $I = (i_1 < \dots < i_r)$  est la permutation  $\text{pat}(I, \tau) = \pi \in \mathfrak{S}_r$  définie par :

$$\forall j, k \in \llbracket 1, r \rrbracket, \quad \pi(j) < \pi(k) \iff \tau(i_j) < \tau(i_k).$$

$$\tau = \underline{4}27\underline{6}3\underline{1}5 \quad \Rightarrow \quad \text{pat}(I, \tau) = 231$$

#### Définition

Le nombre d'occurrences d'un motif  $\pi \in \mathfrak{S}_r$  dans  $\tau \in \mathfrak{S}_n$  est :

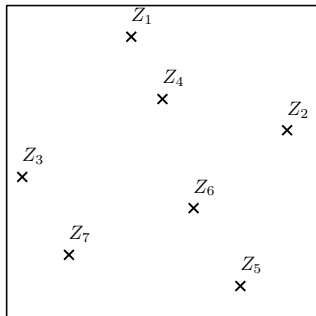
$$\text{Occ}(\pi, \tau) := \sum_{I \in \binom{\llbracket 1, n \rrbracket}{r}} 1_{\text{pat}(I, \tau) = \pi}$$

Exemple :  $\text{Occ}(21, \tau)$  est le nombre d'inversions dans  $\tau$ .

# III. Application : motifs dans les permutations

## Permutation associée à un nuage de points

Soient  $Z_1, \dots, Z_n \in [0, 1]^2$  avec aucune abscisse ou ordonnée en commun. On définit  $\tau = \text{Perm}(Z_1, \dots, Z_n)$  par :  
 $\tau(i) = j$  si et seulement si le  $i$ -ème point partant de la gauche est le  $j$ -ème point partant du bas.

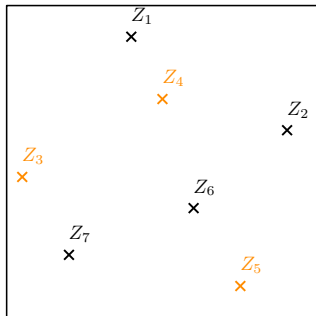


$$\text{Perm}(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6, Z_7) = 4\ 2\ 7\ 6\ 3\ 1\ 5$$

# III. Application : motifs dans les permutations

## Permutation associée à un nuage de points

Soient  $Z_1, \dots, Z_n \in [0, 1]^2$  avec aucune abscisse ou ordonnée en commun. On définit  $\tau = \text{Perm}(Z_1, \dots, Z_n)$  par :  
 $\tau(i) = j$  si et seulement si le  $i$ -ème point partant de la gauche est le  $j$ -ème point partant du bas.



$\text{Perm}(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6, Z_7) = 4\ 2\ 7\ 6\ 3\ 1\ 5$

$$\text{Occ}(\pi, \tau) = \sum_{I \in \binom{[1, n]}{r}} \mathbf{1}_{\text{Perm}(Z_i, i \in I) = \pi}$$

Si les  $Z_i$  sont aléatoires, c'est une  $U$ -statistique !

### III. Application : motifs dans les permutations

#### Propriété

Si  $Z_1, \dots, Z_n$  sont i.i.d.  $\text{Unif}([0, 1]^2)$  alors  $\tau_n = \text{Perm}(Z_1, \dots, Z_n)$  est de loi uniforme sur  $\mathfrak{S}_n$ .

### III. Application : motifs dans les permutations

#### Propriété

Si  $Z_1, \dots, Z_n$  sont i.i.d. Unif  $([0, 1]^2)$  alors  $\tau_n = \text{Perm}(Z_1, \dots, Z_n)$  est de loi uniforme sur  $\mathfrak{S}_n$ .

#### Corollaire (Janson et al. 2015)

Si  $\tau_n$  est de loi uniforme sur  $\mathfrak{S}_n$  et  $\pi \in \mathfrak{S}_r$  est fixé, alors :

$$\frac{\text{Occ}(\pi, \tau_n) - \binom{n}{r} \frac{1}{r!}}{n^{r-1/2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

où  $((r-1)!\sigma)^2 = \text{Var}[\varphi_\pi(Z_r)]$  et

$$\varphi_\pi(z) = \text{P}(\text{Perm}(Z_1, \dots, Z_{r-1}, z) = \pi).$$

On peut de plus montrer que  $\sigma > 0$ .

### III. Application : motifs dans les permutations

Le *type cyclique* d'une permutation est la suite  $t = (t_1, \dots, t_n)$  où  $t_p$  est le nombre de  $p$ -cycles dans cette permutation.  
Fixons un tel type cyclique.



### III. Application : motifs dans les permutations

Le *type cyclique* d'une permutation est la suite  $t = (t_1, \dots, t_n)$  où  $t_p$  est le nombre de  $p$ -cycles dans cette permutation.

Fixons un tel type cyclique.

On définit  $\mathcal{V}_t := \{(p, k, \ell) : 1 \leq p \leq n, 1 \leq k \leq t_p, 1 \leq \ell \leq p\}$  et  $\varepsilon : (p, k, \ell) \mapsto (p, k, \ell+1)$  où  $\ell+1$  est pris modulo  $p$ .

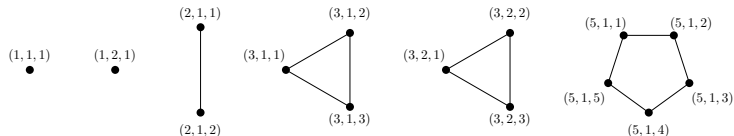
### III. Application : motifs dans les permutations

Le *type cyclique* d'une permutation est la suite  $t = (t_1, \dots, t_n)$  où  $t_p$  est le nombre de  $p$ -cycles dans cette permutation.

Fixons un tel type cyclique.

On définit  $\mathcal{V}_t := \{(p, k, \ell) : 1 \leq p \leq n, 1 \leq k \leq t_p, 1 \leq \ell \leq p\}$  et  $\mathfrak{s} : (p, k, \ell) \mapsto (p, k, \ell+1)$  où  $\ell+1$  est pris modulo  $p$ .

On obtient un graphe  $\mathcal{L}_t$ , de sommets  $\mathcal{V}_t$  et avec une arête entre  $i$  et  $\mathfrak{s}(i)$  pour tout  $i \in \mathcal{V}_t$ .



**Figure:** Le graphe  $\mathcal{L}_t$  correspondant au type cyclique  $t = (2, 1, 2, 0, 1)$ .

### III. Application : motifs dans les permutations

#### Construction géométrique d'une permutation $t$ -cyclique

Soit  $(U_i)_{i \in \mathcal{V}_t}$  une famille de v.a.i.i.d. Unif  $([0, 1])$ . Pour tout  $i \in \mathcal{V}_t$  on définit  $Z_i := (U_i, U_{s(i)})$ .

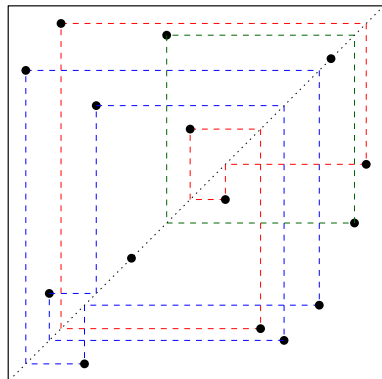
Alors  $\tau = \text{Perm}(Z_i, i \in \mathcal{V}_t)$  est une permutation  $t$ -cyclique aléatoire uniforme.

# III. Application : motifs dans les permutations

## Construction géométrique d'une permutation $t$ -cyclique

Soit  $(U_i)_{i \in \mathcal{V}_t}$  une famille de v.a.i.i.d. Unif  $([0, 1])$ . Pour tout  $i \in \mathcal{V}_t$  on définit  $Z_i := (U_i, U_{s(i)})$ .

Alors  $\tau = \text{Perm}(Z_i, i \in \mathcal{V}_t)$  est une permutation  $t$ -cyclique aléatoire uniforme.



Construction géométrique d'une permutation  $(2, 1, 2, 0, 1)$ -cyclique uniforme. Ici on a :

$$\begin{aligned}\tau &= 12\ 5\ 15\ 1\ 11\ 6\ 14\ 10\ 8\ 3\ 2\ 4\ 13\ 7\ 9 \\ &= (7, 14) \circ (2, 5, 11) \circ (1, 12, 4) \circ (3, 15, 9, 8, 10)\end{aligned}$$

### III. Application : motifs dans les permutations

Rappel :  $\text{Occ}(\pi, \tau) = \sum_{I \in \binom{\mathcal{V}_t}{r}} \mathbf{1}_{\text{Perm}(Z_i, i \in I) = \pi}$ .

$\mathcal{L}_t$  est un graphe de dépendance pour la famille  $(Z_i)_{i \in \mathcal{V}_t}$  !

### III. Application : motifs dans les permutations

Rappel :  $\text{Occ}(\pi, \tau) = \sum_{I \in \binom{[r]}{t}} \mathbf{1}_{\text{Perm}(Z_i, i \in I) = \pi}$ .

$\mathcal{L}_t$  est un graphe de dépendance pour la famille  $(Z_i)_{i \in \mathcal{V}_t}$  !

**Corollaire (D. 2024, mais aussi Féray–Kammoun 2023)**

Fixons  $\pi \in \mathfrak{S}_r$ . Si  $\tau_n$  est une permutation  $t^{(n)}$ -cyclique uniforme, où  $t_1^{(n)} = o(\sqrt{n})$  et  $2t_2^{(n)} = n\beta + o(n)$ , alors :

$$\frac{\text{Occ}(\pi, \tau_n) - \binom{n}{r} \frac{1}{r!}}{n^{r-1/2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

où  $((r-1)!\sigma)^2 = \text{Var}[\varphi(U, V)] + \beta \text{Cov}[\varphi(U, V), \varphi(V, U)]$   
et  $U, V$  sont i.i.d.  $\text{Unif}([0, 1])$ .

### III. Application : motifs dans les permutations

Rappel :  $\text{Occ}(\pi, \tau) = \sum_{I \in \binom{[r]}{t}} \mathbf{1}_{\text{Perm}(Z_i, i \in I) = \pi}$ .

$\mathcal{L}_t$  est un graphe de dépendance pour la famille  $(Z_i)_{i \in \mathcal{V}_t}$  !

**Corollaire (D. 2024, mais aussi Féray–Kammoun 2023)**

Fixons  $\pi \in \mathfrak{S}_r$ . Si  $\tau_n$  est une permutation  $t^{(n)}$ -cyclique uniforme, où  $t_1^{(n)} = o(\sqrt{n})$  et  $2t_2^{(n)} = n\beta + o(n)$ , alors :

$$\frac{\text{Occ}(\pi, \tau_n) - \binom{n}{r} \frac{1}{r!}}{n^{r-1/2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

où  $((r-1)!\sigma)^2 = \text{Var}[\varphi(U, V)] + \beta \text{Cov}[\varphi(U, V), \varphi(V, U)]$   
et  $U, V$  sont i.i.d.  $\text{Unif}([0, 1])$ .

On peut de plus montrer que  $\sigma > 0$ .

### III. Application : motifs dans les permutations

Corollaire (D. 2024, mais aussi Féray–Kammoun 2023)

Fixons  $\pi \in \mathfrak{S}_r$ . Si  $\tau_n$  est une permutation  $t^{(n)}$ -cyclique uniforme, où  $t_1^{(n)} = o(\sqrt{n})$  et  $2t_2^{(n)} = n\beta + o(n)$ , alors :

$$\frac{\text{Occ}(\pi, \tau_n) - \binom{n}{r} \frac{1}{r!}}{n^{r-1/2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

où  $((r-1)!\sigma)^2 = \text{Var}[\varphi(U, V)] + \beta \text{Cov}[\varphi(U, V), \varphi(V, U)]$   
et  $U, V$  sont i.i.d.  $\text{Unif}([0, 1])$ .

On peut de plus montrer que  $\sigma > 0$ .

- Marche aussi si  $\tau_n$  est de loi *invariante par conjugaison*.



### III. Application : motifs dans les permutations

#### Corollaire (D. 2024, mais aussi Féray–Kammoun 2023)

Fixons  $\pi \in \mathfrak{S}_r$ . Si  $\tau_n$  est une permutation  $t^{(n)}$ -cyclique uniforme, où  $t_1^{(n)} = o(\sqrt{n})$  et  $2t_2^{(n)} = n\beta + o(n)$ , alors :

$$\frac{\text{Occ}(\pi, \tau_n) - \binom{n}{r} \frac{1}{r!}}{n^{r-1/2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

où  $((r-1)!\sigma)^2 = \text{Var}[\varphi(U, V)] + \beta \text{Cov}[\varphi(U, V), \varphi(V, U)]$   
et  $U, V$  sont i.i.d.  $\text{Unif}([0, 1])$ .

On peut de plus montrer que  $\sigma > 0$ .

- Marche aussi si  $\tau_n$  est de loi *invariante par conjugaison*.
- On peut aussi énoncer une convergence jointe en  $\pi \in \mathfrak{S}_r$ .

### III. Application : motifs dans les permutations

Corollaire (D. 2024, mais aussi Féray–Kammoun 2023)

Fixons  $\pi \in \mathfrak{S}_r$ . Si  $\tau_n$  est une permutation  $t^{(n)}$ -cyclique uniforme, où  $t_1^{(n)} = o(\sqrt{n})$  et  $2t_2^{(n)} = n\beta + o(n)$ , alors :

$$\frac{\text{Occ}(\pi, \tau_n) - \binom{n}{r} \frac{1}{r!}}{n^{r-1/2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

où  $((r-1)!\sigma)^2 = \text{Var}[\varphi(U, V)] + \beta \text{Cov}[\varphi(U, V), \varphi(V, U)]$   
et  $U, V$  sont i.i.d.  $\text{Unif}([0, 1])$ .

On peut de plus montrer que  $\sigma > 0$ .

- Marche aussi si  $\tau_n$  est de loi *invariante par conjugaison*.
- On peut aussi énoncer une convergence jointe en  $\pi \in \mathfrak{S}_r$ .
- On peut autoriser une proportion non négligeable de points fixes, mais c'est plus compliqué...

### III. Application : motifs dans les permutations

Corollaire (D. 2024, mais aussi Féray–Kammoun 2023)

Fixons  $\pi \in \mathfrak{S}_r$ . Si  $\tau_n$  est une permutation  $t^{(n)}$ -cyclique uniforme, où  $t_1^{(n)} = o(\sqrt{n})$  et  $2t_2^{(n)} = n\beta + o(n)$ , alors :

$$\frac{\text{Occ}(\pi, \tau_n) - \binom{n}{r} \frac{1}{r!}}{n^{r-1/2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

où  $((r-1)!\sigma)^2 = \text{Var}[\varphi(U, V)] + \beta \text{Cov}[\varphi(U, V), \varphi(V, U)]$   
et  $U, V$  sont i.i.d. Unif  $([0, 1])$ .

On peut de plus montrer que  $\sigma > 0$ .

- Marche aussi si  $\tau_n$  est de loi *invariante par conjugaison*.
- On peut aussi énoncer une convergence jointe en  $\pi \in \mathfrak{S}_r$ .
- On peut autoriser une proportion non négligeable de points fixes, mais c'est plus compliqué...
- La construction géométrique peut servir à étudier d'autres statistiques (LIS, RS, records...)

### III. Application : motifs dans les permutations

Corollaire (D. 2024, mais aussi Féray–Kammoun 2023)

Fixons  $\pi \in \mathfrak{S}_r$ . Si  $\tau_n$  est une permutation  $t^{(n)}$ -cyclique uniforme, où  $t_1^{(n)} = o(\sqrt{n})$  et  $2t_2^{(n)} = n\beta + o(n)$ , alors :

$$\frac{\text{Occ}(\pi, \tau_n) - \binom{n}{r} \frac{1}{r!}}{n^{r-1/2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

où  $((r-1)!\sigma)^2 = \text{Var}[\varphi(U, V)] + \beta \text{Cov}[\varphi(U, V), \varphi(V, U)]$   
et  $U, V$  sont i.i.d. Unif  $([0, 1])$ .

On peut de plus montrer que  $\sigma > 0$ .

- Marche aussi si  $\tau_n$  est de loi *invariante par conjugaison*.
- On peut aussi énoncer une convergence jointe en  $\pi \in \mathfrak{S}_r$ .
- On peut autoriser une proportion non négligeable de points fixes, mais c'est plus compliqué...
- La construction géométrique peut servir à étudier d'autres statistiques (LIS, RS, records...)

Merci pour votre attention !